Hoja 1 – Introducción al Cálculo de Probabilidades

1.- Dados el conjunto $B \subset \Omega$ y las sucesiones $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ y $\{B_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, se pide

(1.a) Demostar la igualdad $\limsup A_n = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n$.

(1.b) Si $A_n \downarrow$, demostrar que existe $\lim_{n\to\infty} A_n$ y que $\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$.

(1.c) Demostrar que $\limsup A_n = \limsup A_{2n} \cup \limsup A_{2n-1}$ y $\liminf A_n = \liminf A_{2n} \cap \liminf A_{2n-1}$.

(1.d) Demostrar que $\limsup(B - A_n) = B - \liminf A_n$ y $\liminf(B - A_n) = B - \limsup A_n$.

(1.e) Demostrar que $(\limsup A_n)^c = \liminf A_n^c$ y $(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c$.

(1.f) Demostrar que $\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$ y $\liminf(A_n \cap B_n) = \liminf A_n \cap \liminf B_n$.

2.- Determinar los límites inferiores y superiores de $\{A_n : n \geq 1\}$ cuando:

(2.a) $A_{2n-1} = \mathbb{Q} \cap \left[\frac{1}{n}, \frac{5n}{2n+2}\right]$ y $A_{2n} = (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap \left(-\frac{2}{n}, \frac{7n+3}{9n}\right]$.

(2.b) $A_{3n-2} = \left(\frac{n-1}{5n+3}, \frac{2n-1}{n}\right]$, $A_{3n-1} = \left(\frac{3n}{5n+1}, \frac{3n+2}{n}\right)$ y $A_{3n} = \left[1, \frac{2n^2+1}{n+2}\right)$.

(2.c) $A_n = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{1}{n} \leq x \leq 3 - \frac{1}{n}\right\}$.

3.- Supongamos $\Omega = \mathbb{R}^2$. Calcular los conjuntos $\lim_{n\to\infty} E_n$, $\lim_{n\to\infty} E_n^c$, $\lim_{n\to\infty} F_n$, $\lim_{n\to\infty} F_n^c$ y $\lim_{n\to\infty}(E_n \cap F_n^c)$, donde

$$
\begin{aligned}
E_n &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 + \frac{1}{n}\right\}, \\
F_n &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{n}{n+1}\right\}.
\end{aligned}
$$

4.- Calcular $\lim_{n\to\infty} A_n$ en los siguientes casos:

(4.a) $A_n = \{(x,y) \in \mathrm{I\!R}^2 : \frac{1}{n} \leq x^2 + y^2 \leq 4 - \frac{1}{n}\}$.

(4.b) $A_n = \{(x,y) \in \mathrm{I\!R}^2 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n}\}$.

5.- Estudiar la convergencia de la sucesión $\{A_n : n \geq 1\} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ en los siguientes casos:

(5.a) $A_n = \left(-\frac{1}{n}, 1\right]$ si n es par, y $\left(-1, \frac{1}{n}\right]$ si n es impar.

(5.b) $A_n = \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ si n es impar, y $\left[\frac{1}{n}, 1\right)$ si n es par.